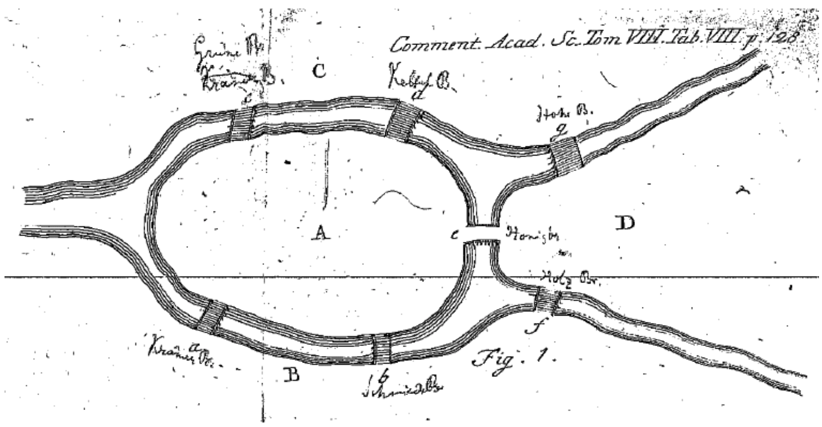
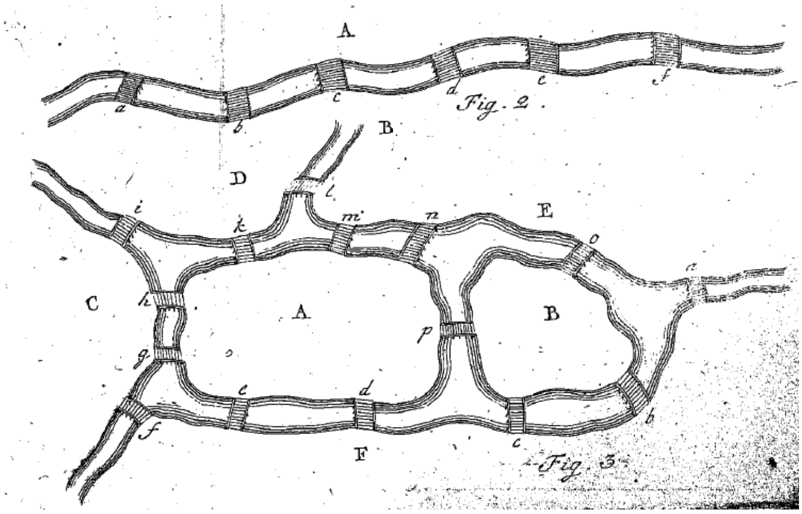
Il problema dei ponti di Königsberg[1] *à la* Euler
Trad. di Giorgio Mainini

Solutio problematis ad Geometriam situs pertinentis[2]
pubblicato per la prima volta nei
Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae[3]
Vol. 8, 1741, pagine 128-140

§ 1. Oltre che di quella parte della Geometria, che si occupa delle quantità, e che da sempre è stata coltivata con grandissimo zelo, di un'altra parte finora del tutto sconosciuta per primo fece menzione Leibnitz[4], che la chiamò Geometria del luogo. Questa parte si occupa solo del luogo in sé stesso e delle proprietà che se ne possono ricavare; in questo modo di fare geometria non si considerano le quantità e non si deve fare alcun calcolo. In quale maniera i problemi appartengano a questa Geometria del luogo, e con quali metodi si debbano risolvere, non è sufficientemente chiaro. Perciò, siccome ultimamente è stata fatta menzione di un problema che sembra appartenere ad essa, o perlomeno ad essa vicino, poiché non richiede né determinazione di quantità, né è da risolvere in forza di calcoli di quantità, non ho avuto il minimo dubbio che appartenesse proprio alla Geometria del luogo: prima di tutto perché nella sua soluzione si deve prendere in considerazione solo il luogo, poi perché non si deve fare alcun calcolo. Ho dunque inventato un mio metodo per risolvere questo genere di problemi, che voglio esporre qui come esempio di Geometria del luogo.



[1] Oggi Kaliningrad, exclave russa tra la Polonia e la Lituania.
[2] "Soluzione di un problema attinente alla Geometria del luogo". La "Geometria del luogo" si chiama oggi Topologia.
Una copia del documento originale si può scaricare dal sito del Dartmouth College
http://eulerarchive.maa.org//docs/originals/E053.pdf
[3] Petropolitanus significa "di San Pietroburgo". (Nome originale Sankt Piter burkh, poi Sankt Petersburg, poi Petrograd poi Leningrad, poi di nuovo Sankt Petersburg, per tornare a chiamarsi di nuovo, ogni 9 maggio, Leningrad).
[4] Più comunemente scritto Leibniz.



§ 2. Questo problema, che mi era stato presentato come abbastanza noto, era il seguente: a Regiomonte[5], in Prussia c'è un'isola, detta "Der Kneiphof", circondata dai due rami di un fiume, nel modo mostrato in figura. Le regioni determinate dal fiume sono congiunte da sette ponti, indicati con a, b, c, d, e, f , g. Il problema consiste nel sapere se si può passare una volta e soltanto una volta su tutti i ponti. Mi venne detto che alcuni rispondevano che non si può, altri che non lo sapevano: nessuno rispose che si poteva. Io mi posi il problema generale: qualunque sia la forma del fiume e delle sue ramificazioni, e per qualsiasi numero di ponti, si può stabilire se sia possibile o no passare su tutti i ponti una e una sola volta?

§ 3. Per quanto riguarda il problema regiomontano dei sette ponti, si sarebbe potuto procedere con l'elencazione completa di tutti i percorsi: da questa si potrebbe allora ricavare qual sia il percorso o se non ve ne sia alcuno. Ma questo metodo, da un canto non è praticabile e per l'eccessivo numero di combinazioni e perché troppo difficile e stancante, dall'altro non condurrebbe alla soluzione di problemi analoghi con altri numeri di ponti. Inoltre, anche se il metodo conducesse a buon fine, vi si intravedono troppe cose senza relazione con il problema. Perciò, abbandonato questo metodo, ne ho cercato un altro che non uscisse dal seminato, ma che mostrasse se il percorso esista oppure no. Ho difatti congetturato che tale metodo sarebbe stato molto più semplice.

§ 4. Il mio metodo si fonda su un modo idoneo di descrivere i cammini. Ho cominciato con l'indicare con A, B, C, D le singole regioni descritte, determinate dal corso del fiume. Così, se qualcuno va da A a B, attraversando o il ponte a oppure il ponte b, indico questo percorso con AB. Se poi il viaggiatore si recherà in D attraverso il ponte f, rappresenterò questo percorso con BD, e indicherò il tragitto completo soltanto con ABD, perché la lettera di mezzo, B, designa sia la regione di arrivo del primo sia quella di partenza del secondo tragitto.

§ 5. Allo stesso modo, se poi il viaggiatore dalla regione D si reca in C attraverso il ponte g, indicherò il tutto con ABDC. Dalle quattro lettere ABDC si capisce che il viaggiatore, che era nella regione A, è passato alla regione B, di qui è passato nella regione D, dalla quale è poi proseguito in C. Siccome queste regioni sono separate dal

[5] Latinizzazione di Königsberg

fiume, si capisce anche che il viaggiatore ha necessariamente attraversato tre ponti. Così, se saranno stati attraversati quattro ponti, il percorso deve essere descritto con cinque lettere. In generale, la passeggiata del viaggiatore che attraversa un certo numero di ponti deve essere descritta da un numero di lettere che superi di uno il numero dei ponti. Di conseguenza, per descrivere l'attraversamento di sette ponti, occorrono otto lettere.

§ 6. In questo modo di rappresentare non tengo conto di quale ponte sia stato attraversato ma solo in quale regione si arrivi, perché, se si può andare dall'una all'altra attraverso più ponti, non ha importanza quale di essi sia stato scelto ma soltanto in quale regione si sia arrivati. Da ciò si comprende che, se esiste un percorso attraverso i sette ponti che rispetti le condizioni imposte, esso deve essere descritto con otto lettere, e che le lettere A e B devono essere vicine due volte, poiché tra A e B ci sono i due ponti a e b che le congiungono. Allo stesso modo devono susseguirsi due volte le lettere A e C nella serie di otto lettere; la successione delle lettere A e D deve occorrere una sola volta, come le successioni delle lettere B e D, e delle lettere C e D.

§ 7. La domanda allora si riduce a questo: è possibile costruire una serie di otto lettere composta dalle lettere A, B, C e D nella quale ogni successione si presenti tante volte quanto è richiesto? Prima di cercare una tale disposizione, conviene dimostrare se le lettere possono essere disposte in tal modo o no. Difatti, se si potesse dimostrare che una tale disposizione non è realizzabile, sarebbe inutile qualunque fatica volta a trovarla. Perciò ho cercato una regola in forza della quale si potesse decidere se una disposizione come quella cercata esista o no, sia per il problema in questione sia per altri simili.

§ 8. Per cercarla, ho immaginato che esista una sola regione A, alla quale conduca un certo numero di ponti a, b, c, d, ecc. Di questi ponti comincio con il pensarne uno, diciamo a. Ora, sia che un viaggiatore vi sia transitato per arrivare in A oppure per uscirne, secondo il modo stabilito sopra di descrivere il percorso, è necessario che la lettera A appaia una sola volta. Se ad A fanno capo tre ponti, a, b e c, e un viaggiatore passa su tutti e tre una sola volta, allora nella descrizione del suo migrare la lettera A apparirà due volte, indipendentemente dal fatto che da A sia partito o ad A sia arrivato. Allo stesso modo, se i ponti fossero cinque, nella descrizione del viaggio la lettera A deve apparire tre volte. Insomma, per qualunque numero dispari di ponti, la lettera A apparirà tante volte quanto è la metà del numero aumentato di uno[6].

§ 9. Nel caso di Königsberg, dunque, poiché l'isola A è congiunta alle altre regioni con i cinque ponti a, b, c, d, e, è necessario che, nella descrizione del percorso attraverso questi ponti, la lettera A appaia tre volte. Per lo stesso motivo, la lettera B deve apparire due volte, poiché tre ponti conducono alla regione B; allo stesso modo devono apparire due volte sia la lettera C sia la D. Dunque nella serie di otto lettere che deve descrivere il percorso per sette ponti, la lettera A deve apparire tre volte, e la B, la C e la D due volte ciascuna: cosa che, in una serie di otto lettere, sarà assolutamente impossibile realizzare. Diventa pertanto evidente che la passeggiata sui sette ponti regiomontani non può essere fatta.

---

[6] Attenzione al genere dell'aggettivo: se i ponti sono n dispari, la lettera A apparirà $(n+1)/2$ volte, **non** $n/2+1$.

Inserto di costume

Immagina un mainini qualunque che, nel 1741, fosse arrivato alla conclusione appena scritta. Probabilmente si sarebbe rivolto ai *mass media* dell'epoca e l'avrebbe fatta pubblicare con la debita pompa. In effetti, avrebbe pur sempre risolto un problema che avevano affrontato senza successo varie generazioni di regiomontani e chissà quanti viaggiatori passati per di là. Nessuna meraviglia: gli attuali *mass media* sono spesso portatori di "scoperte" ben minori, dal raro zigomiceto scovato sotto una felce in Bedrina, al cinquantesimo genere di *Bernardinia pulcherrima L.*, caratterizzata da una micromacula purpurea nel soprassella. Euler, invece, no. Come preannunciato, generalizza, prima di pubblicare sui prestigiosi *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*.

§ 10. Allo stesso modo, in ogni altro caso, in cui il numero di ponti che conducono ad ogni regione è dispari, si può stabilire se, alle solite condizioni, il passaggio sui singoli ponti può essere effettuato. Se infatti capita che la somma di tutti i posti nei quali devono apparire le lettere [*le occorrenze delle lettere*] è uguale al numero dei ponti aumentato di uno, la passeggiata è possibile; se invece, come avviene nel nostro esempio, la somma di tutti i posti è maggiore del numero dei ponti aumentato di uno, allora la passeggiata è impossibile[7]. Inoltre, la regola che ho dato per trovare le occorrenze di A a partire dal numero di ponti che conducono alla regione A vale sempre; sia se tutti i ponti portano ad una sola regione B, come in Fig. 2, sia se conducono a regioni diverse; considero quindi una sola regione A e ricerco quante debbano essere le occorrenze della lettera A.

§ 11. Se invece il numero di ponti che conducono alla regione A fosse pari, allora bisogna distinguere se il viaggiatore comincia il suo andare da A o no. Se i ponti che conducono ad A sono due e il viaggiatore parte da A, allora la lettera A deve apparire due volte, una volta per designare l'uscita da A per uno dei due ponti, e una volta per designare il ritorno in A dall'altro. Se invece il cammino comincia in un'altra regione, allora la lettera A deve occorrere una sola volta, che valga per l'entrata in essa e anche per l'uscita, considerato come ho stabilito di descrivere i cammini.

§ 12. Si pensi adesso che siano quattro i ponti che conducono ad A e che il viaggiatore parta da A: allora nella descrizione di tutto il percorso la lettera A dovrà apparire tre volte, se passerà una volta su ogni ponte; se invece comincerà il suo cammino in un'altra regione, allora la lettera A dovrà apparire soltanto due volte. Se i ponti fossero sei e il viaggiatore partisse da A, allora la lettera A occorrerà quattro volte; se partisse da un'altra regione, apparirebbe solo tre volte. Perciò, in generale, se il numero dei ponti è pari, la metà di tale numero indica quante volte la lettera A occorrerà se il viaggiatore non parte da A; se invece parte da A, le occorrenze saranno la metà del numero di ponti aumentata[8] di uno.

§ 13. Poiché il viaggio non può che partire da una sola regione, definisco così il numero delle occorrenze di ogni lettera: esso è la metà del numero di ponti aumentato di uno, se il numero è dispari; o la metà del numero dei ponti, se il numero è pari. Infine, se il numero totale delle occorrenze di tutte le lettere è uguale al numero di tutti ponti aumentato di uno, allora la passeggiata è possibile se si comincia in una regione nella quale conduce un numero dispari di ponti. Se invece il numero totale di occorrenze fosse minore del numero dei ponti aumentato di uno, allora la passeggiata è possibile se

---

[7] Qui, evidentemente, Eulero ritiene che il ragionamento fatto sopra, con quella somma $3+2+2+2=9>7+1$, sia sufficientemente esplicativo.

[8] Attenzione al genere dell'aggettivo: è la metà che deve essere aumentata di uno. Se il numero di ponti è n pari, A occorrerà $n/2+1$, non $(n+1)/2$.

si comincia in una regione alla quale conduce un numero pari di ponti, perché in questo modo il numero delle occorrenze deve essere aumentato di uno.

§ 14. Per applicare la regola appena enunciata, nel caso di un numero qualunque di ponti e di regioni comunque definite dai rami del fiume, eseguo le seguenti operazioni. Per prima cosa indico con le lettere A, B, C, ecc. le varie regioni separate dai rami del fiume. In secondo luogo conto quanti sono i ponti che conducono alle singole regioni, li sommo e aumento il risultato di uno: questo numero me lo segno per bene, perché mi servirà in seguito. In terzo luogo ad ogni lettera A, B, C, ecc. assegno come indice il numero di ponti che conducono alla regione corrispondente. In quarto, segno con un asterisco le lettere con indice pari. In quinto, scrivo le metà di tutti i numeri pari e le metà dei numeri dispari aumentati di uno. In sesto, sommo tutti i numeri calcolati nella quinta operazione: se questa somma è minore di una unità oppure uguale al numero che mi sono segnato prima (che è il numero dei ponti aumentato di uno) allora concludo che la passeggiata può essere realizzata. Bisogna però tener presente che se la somma trovata è minore di una unità rispetto al numero segnato, allora la passeggiata deve iniziare in una delle regioni contrassegnate con l'asterisco, mentre deve cominciare in una non contrassegnata con l'asterisco se la somma è uguale al numero segnato.

Ecco che cosa ottengo nel caso dei ponti regiomontani:

Numero dei ponti: 7 lo aumento di uno mi segno **8**

A,	5	3
B,	3	2
C,	3	2
D,	3	2

La somma dei numeri dell'ultima colonna è maggiore di 8, e di conseguenza la passeggiata è impossibile.

§ 15. Si consideri ora la Fig. 3: in essa si vedono alcune regioni, di cui due sono isole, unite fra di loro da quindici ponti, a, b, c, d, ecc. Si chiede se è possibile attraversare tutti i ponti, ciascuno una sola volta. Per prima cosa designo con le lettere A, B, C, D, E, F le regioni distinte fra di loro e così si capisce che le regioni sono sei. Poi aumento di uno il numero dei ponti, ottenendo 16: questo numero me lo segno per bene.

Procedendo come indicato ottengo lo schema

	16
A * - 8	4
B * - 4	2
C * - 4	2
D ---- 3	2
E ---- 5	3
F * - 6	3
	16

Poiché la somma, 16, è uguale al numero segnato, **16**, ne discende che la passeggiata può essere realizzata nel modo desiderato soltanto se si parte o dalla regione D o dalla E, le cui lettere non sono contrassegnate con l'asterisco. La passeggiata potrebbe essere la seguente EaFbBcFdAeFfCgAbCiDkAmEnApBoElD, dove tra le lettere maiuscole ho interposto i ponti per i quali transitare.

§ 16. Con il metodo descritto sarà dunque facile, anche in casi molto complessi, stabilire se la passeggiata sia possibile o no. Tuttavia da questo stesso metodo è possibile ricavarne senza difficoltà un altro, molto più semplice, se si osserva quanto segue. Per prima cosa osservo che la somma di tutti i numeri di ponti assegnati alle singole lettere A, B, C è uguale al doppio del numero dei ponti. La ragione di ciò consiste nel fatto che ogni ponte viene contato due volte: una volta per la regione di partenza e una per la regione di arrivo.

§ 17. Da questa osservazione consegue che la somma di tutti i numeri di ponti assegnati ad ogni regione è un numero pari, perché la sua metà è proprio il numero dei ponti. È dunque impossibile che ci sia un solo numero dispari assegnato ad una regione, e nemmeno che siano tre, o cinque, ecc. Per la qual cosa, se esistono numeri assegnati dispari, il loro numero deve essere pari, come nell'esempio regiomontano, dove erano quattro (vedi § 14.); anche nell'esempio del § 15. sono due, assegnati alle lettere D e E.

§ 18. Siccome la somma di tutti i numeri assegnati alle lettere A, B, C, ecc. è il doppio del numero dei ponti, è chiaro che, se le si aggiunge due e si divide il risultato per 2, si ottiene il numero che mi sono segnato per bene[9]. Se dunque tutti i numeri assegnati alle lettere A, B, C ecc. fossero pari; se si prendessero le loro metà, e di queste metà si facesse la somma per ottenere i numeri della terza colonna, la loro somma sarebbe minore di una unità rispetto al numero ben segnato. Di conseguenza, in questi casi la passeggiata sarebbe sempre possibile. Difatti, qualunque sia la regione da cui inizia il tragitto, ad essa condurrebbe un numero pari di ponti, come è richiesto. Così, nell'esempio regiomontano, se qualcuno volesse passare due volte su ogni ponte (come se ogni ponte fosse composto di due ponti) potrebbe partire da dove vuole e raggiungere il suo scopo.

§ 19. Inoltre se soltanto due fra i numeri assegnati alle lettere A, B, C ecc. fossero dispari, e tutti gli altri pari, allora il cammino sarebbe sempre possibile, se soltanto si ha l'avvertenza di partire da una delle regioni alle quali è assegnato un numero dispari. Difatti se si dimezzano i numeri pari e i dispari vengono prima aumentati di uno e poi divisi per due, come prescritto, la somma di queste metà risulterà minore di una unità rispetto al numero dei ponti, e perciò uguale al numero ben segnato. Quindi si capisce che se i numeri dispari assegnati alle regioni fossero quattro o sei o otto ecc., allora la somma dei numeri della terza colonna sarebbe maggiore del numero ben segnato, e lo supererebbe di una unità, o di due, o di tre, ecc. e quindi la passeggiata sarebbe impossibile.

§ 20. Dato dunque un qualunque caso, si può immediatamente e facilissimamente concludere se, alle solite condizioni, la passeggiata è possibile o no, in forza della seguente regola. Se le regioni alle quali conduce un numero dispari di ponti sono più di due, allora si può affermare con certezza che la passeggiata è impossibile. Se sono solo due le regioni alle quale conduce un numero dispari di ponti, allora la passeggiata è possibile, a condizione che si parta da una di esse. Se infine a nessuna regione porta un numero dispari di ponti, allora la passeggiata è possibile, qualunque sia la regione dalla

[9] vedi § 14.

quale si parte. E questa regola è del tutto soddisfacente, qualunque sia il problema posto.

§ 21. Una volta stabilito che la passeggiata è realizzabile, resta tuttavia la domanda in quale modo realizzarla. Per rispondere, faccio capo a questa regola: con il pensiero si eliminino tutte le coppie di ponti che congiungono una regione con un'altra: con ciò si riduce drasticamente il numero di ponti; poi ci si chieda, e a questo punto è facile, quale sia il percorso sui ponti rimasti; trovatolo, i ponti eliminati con il pensiero non disturberanno più di tanto, se appena si sta un pochino attenti. E, per la forza stessa della regola, non reputo si debbano dare ulteriori e più ampie indicazioni per costruire i percorsi.

Qualche osservazione

1) L'aspetto del lavoro: se un lettore non sapesse che si tratta di matematica, potrebbe pensare di trovarsi di fronte ad un racconto. L'assenza totale di formule è impressionante. Lo si confronti con un qualsiasi testo contemporaneo, anche scolastico.
2) La capacità espositiva dell'Autore è esemplare. Un esempio è dato dai §§ 4. e 5., dove spiega in lungo e in largo, correndo un certo qual rischio di pignoleria, come descriverà i percorsi.
3) Euler, più di una volta, "tira via", fidandosi dell'evidenza. Ad esempio, dopo aver descritto ciò che avviene se i ponti che conducono ad una regione sono uno, o tre, o cinque, generalizza a tutti i numeri dispari. Come si dice: "La dimostrazione, ovvia, è lasciata per esercizio"… Dal punto di vista della prassi insegnante, il procedimento è da tenere in seria considerazione: perché dimostrare (*sive* appesantire con dimostrazioni) ciò che è accettato senza discussione? Non sto sostenendo che le dimostrazioni sono inutili: sto sostenendo che, se si fanno, devono esserci "buoni" motivi, tra i quali non pongo il richiederla in un "espe".
4) Anche quando ha trovato la regola per stabilire se la passeggiata è possibile, enunciata in sei passaggi nel § 15., Euler non si accontenta. Ci ragiona su nei §§ 16 - 19. e ne ricava un'altra, ben più semplice, nel § 20. Anche qui Euler ci dice che cosa fa (deve fare, dovrebbe fare) il buon insegnante: non accontentarsi del risultato raggiunto, ma "rilanciare", per vedere se non si possa ricavare qualcosa di meglio. In questo senso, il § 21. è un piccolo capolavoro a sé.
5) Si rilegga il § 6.: in esso compare un'osservazione su certe sequenze di lettere che devono ripetersi. L'osservazione è corretta, ma Euler non se ne serve nel seguito del ragionamento. Vien da pensare che l'Autore stesse trovando la soluzione mentre dettava il suo articolo.
6) Si osservi che il lavoro segue un modo di pensare decisamente combinatorio, e giustamente è così classificato nel sito del Dartmouth College (v. nota 2). La matematica sembra fatta di atolli sparsi nell'oceano, ma poi si scoprono ponti (è proprio il caso di dirlo!) che, quando meno te lo aspetti, li congiungono. Gli "specialisti" se lo tengano per detto.

Una mia curiosità

È ben vero che Euler si è occupato di una quantità spaventosa di argomenti, dalla teoria dei numeri ai movimenti del sole e della luna, dalle serie infinite alla scienza navale, dal comportamento dei corpi elastici al modo migliore di costruire lenti, e di altro ancora, "libri di testo" compresi: ma chi gliel'ha fatto fare di occuparsi di un giochino al quale si abbandonavano, la domenica pomeriggio, i bravi regiomontani con mogli, figli e ospiti vari? Vista la grandezza del personaggio, mi piace credere che abbia presentito che, oltre due secoli dopo, qualcuno avrebbe dovuto organizzare i sistemi viari di metropoli al limite del collasso o costruire oggettini microscopici da mettere nei cellulari o nelle sonde spaziali.